Экстремальные полиномы, связанные с полиномами Золотарёва: характеризация и свойства

И. В. Агафонова, В. Н. Малозёмов
Санкт-Петербургский Гос. Университет, Санкт-Петербург
e-mail: i.agafonova@spbu.ru v.malozemov@spbu.ru

Пусть $A, a > 1,\ b < -1,\ M > 0$ — вещественные параметры и

$$P_n(x,t) = x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + \cdots + x_{n-1} t + x_n$$

— алгебраический полином степени не выше n. Ставится задача: *максимизировать значение $P_n(x,b)$ при ограничениях*

$$P_n(x,a) = A, \quad -M \le P_n(x,t) \le M \text{ при } t \in [-1,1].$$

Ограничения совместны только при $A \in [-A_1, A_1]$, где $A_1 = MT_n(a)$ и $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ — полином Чебышёва.

Доказывается, что экстремальный полином $P_n(x^*,t)$ существует, единствен и допускает n-точечную альтернансную характеристику.

Старший коэффициент x_0^* равен нулю при $A = A_0 = (-1)^{n-1}T_{n-1}(a)$, положителен при $A \in (A_0, A_1]$ и отрицателен при $A \in [-A_1, A_0)$.

Изучается поведение экстремального значения $P_n(x^*,b)$ и точек альтернанса при изменении параметра A от $-A_1$ до A_1.

Показывается, что при $A \ne A_0$ полином $P^*(t) = (x_0^*)^{-1} P_n(x^*,t)$ со старшим коэффициентом, равным единице, является решением Второй задачи Золотарёва [1]: наименее уклоняется от нуля на отрезке $[-1,1]$ среди всех унитарных полиномов, принимающих при $t = a$ значение $A(x_0^*)^{-1}$.

Литература

[1] *Золотарев Е. И.* Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля. — В кн.: Полное собрание сочинений. Выпуск второй. Л.: Изд-во АН СССР, 1932. С. 27–29.